

等 別：三等考試  
類 科：電力工程、電子工程  
科 目：工程數學  
考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
- (二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
- (三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、假設  $X$  和  $Y$  為兩個獨立 (independent) 的隨機變數 (random variables)，且  $X$  和  $Y$  之平均值 (mean) 均為零，變異數 (variance) 為  $\sigma^2$  的高斯分布 (Gaussian distribution)。隨機變數  $X$  和  $Y$  的聯合機率密度函數 (joint pdf) 為：

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x, y < \infty.$$

定義兩個新的隨機變數  $R$  及  $\Theta$  如下：假設  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  及  $\Theta = \tan^{-1}(Y/X)$ ，使得  $X = R \cos \Theta$ ，且  $Y = R \sin \Theta$ 。請證明隨機變數  $R$  的機率密度函數為

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right], \quad 0 \leq r < \infty. \quad (6分)$$

二、(一)假設  $z$  為一複數，求所有的  $z$  使得  $\cos z = \sqrt{2}$ 。(4分)

(二)假設  $z$  為一複數，計算  $\oint_C \frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^4 + 4z^2} dz$ ，其中積分路徑  $C$  為圓  $|z-2|=4$  之順時針 (clockwise) 方向圓周 (circle)。(4分)

三、(一)已知一 RC 電路系統可由微分方程式 (differential equation)  $\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = 5x(t)$  表示，其中  $x(t)$  為輸入，且  $y(t)$  為輸出。假設  $x(t) = (3/5)e^{-2t}u(t)$ ，且初始條件 (initial condition)  $y(0^-) = -2$ ，求  $y(t)$ 。(8分)

(二)已知一訊號  $x(t)$  的單邊拉普拉斯轉換 (unilateral Laplace transform) 為：

$$X(s) = e^{-2s} \frac{2s^2 + 1}{s(s+2)^2}$$

請求該訊號  $x(t)$  的初值 (initial value) 及終值 (final value)。(8分)

四、(一)(a)求  $k$  使得  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ，其中  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}$ ；(7分)

(b)如(a)小題，求矩陣  $\mathbf{A}$  的行列式值 (determinant)。(3分)

(二)請求以下線性系統的解  $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 + x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + 3x_2 - x_3 \end{cases}$ ，其中  $x_1(0)=1$ ， $x_2(0)=0$  及

$x_3(0)=1/2$ 。(10分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：7343

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 對稱矩陣  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ，其對角化矩陣 (diagonal matrix)  $\mathbf{D} = \mathbf{PAP}^{-1}$ ，其中  $\mathbf{P}$  是正交矩陣，求  $\mathbf{D} = ?$

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

2 矩陣  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$ ，令  $\det \mathbf{A} = 6$  和  $\det \mathbf{B} = 2$ ，求  $\det \mathbf{AB}^{-1} = ?$

(A)12

(B)6

(C)3

(D)0

3 設  $\mathbf{a}$  為常數向量 (constant vector)， $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ， $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ ，下列何者錯誤？

(A)  $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$

(B)  $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$

(C)  $\nabla \times \mathbf{r} = 0$

(D)  $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \mathbf{a}$

4 求  $\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xydx + x^2dy = ?$

(A)10

(B)15

(C)20

(D)25

5 矩陣  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ，求  $e^{\mathbf{A}t} = ?$

(A)  $\begin{pmatrix} 2e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^{-t} \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2e^t & 0 \\ 0 & 2e^{-t} \end{pmatrix}$

6 下列矩陣何者的秩 (rank) 等於2。

(A)  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \\ 7 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

7 下列那一個是適合的積分因子 (integrating factor)，乘上它以後，將使微分方程式  $(x+y)dx + x \ln(x)dy = 0$  變成正合 (exact)？

(A)  $x$

(B)  $3$

(C)  $\frac{1}{x}$

(D)  $\frac{1}{x^2}$

8 微分方程式  $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$ ，其中  $y(0) = 2, y'(0) = 6$ 。以拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 求解後得到  $Y(s) = \frac{2(s-c)^d + 2}{(s-a)^b}$ ，則下列何者錯誤？

(A)  $a+b+c+d=15$

(B)  $a+b+c-d=7$

(C)  $a-b-c+d=-1$

(D)  $-a+b-c+d=-3$

9 設  $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  為函數  $f(x) = x^3, -\pi < x < \pi$  之傅立葉級數 (Fourier series)，其中  $a_0, a_n, b_n$  為常數，下列何者正確？

(A)  $a_0 + b_n \neq 0$

(B)  $a_0 + a_n \neq 0$

(C)  $a_0 \cdot b_n \neq 0$

(D)  $a_0 \neq 0$

10 設  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$  為微分方程  $y'''' + ay'' + by' + cy = 0$  的通解 (general solution)，其中  $a, b, c, c_1, c_2, c_3$  為常數，下列何者正確？

(A)  $a = -1$

(B)  $b = -1$

(C)  $c = -1$

(D)  $a + b + c = -1$

11 求積分方程  $f(t) = \cos t + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau) d\tau$  的解。

(A)  $1 - \sin t$

(B)  $1 + \sin t$

(C)  $\cos t - \sin t$

(D)  $\cos t + \sin t$

12 令連續隨機函數  $X$  具有機率密度函數  $f(x) = \begin{cases} kx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ ，求其變異數 (variance)  $\sigma^2$ 。(其中  $k$  為常數)

(A)  $\frac{1}{40}$

(B)  $\frac{3}{40}$

(C)  $\frac{1}{80}$

(D)  $\frac{3}{80}$

13 令連續二維隨機變數  $X$  和  $Y$  具有機率密度函數  $f(x, y) = \begin{cases} kxy, & 0 \leq x \leq 1 \text{ and } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ ，求

其機率  $P(X > 0.25, Y > 0.5)$ 。(其中  $k$  為常數)

- (A)  $\frac{5}{8}$                       (B)  $\frac{9}{16}$                       (C)  $\frac{45}{64}$                       (D)  $\frac{75}{128}$

14 求複變函數積分  $\oint_C \left( \frac{\cosh z}{(z-\pi)^3} - \frac{\sin^2 z}{(2z-\pi)^3} \right) dz$ ，其中積分路徑  $C$  為逆時鐘方向繞圓周  $|z| = 3$ 。

- (A)  $\frac{\pi}{4}i$                       (B)  $-\frac{\pi}{4}i$                       (C)  $\frac{\pi}{2}i$                       (D)  $-\frac{\pi}{2}i$

15 求複變函數積分  $\oint_C \frac{z}{(z+1)(z^2+1)} dz$ ，其中積分路徑  $C$  為逆時鐘方向繞橢圓周  $16x^2 + y^2 = 4$ 。

- (A)  $2\pi i$                       (B)  $-2\pi i$                       (C)  $\pi i$                       (D)  $-\pi i$

16 複變函數  $f(z) = z^{24} - 3z^{20} + 4z^{12} - 5z^6$ ，求  $f\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = ?$

- (A)  $5i$                       (B)  $4i$                       (C)  $3i$                       (D)  $2i$

17  $z$  為一複數，若  $\Gamma$  是平面中一個包含原點  $z=0$  之封閉路徑， $\oint_{\Gamma} \frac{\cos(z)}{z} dz = ?$

- (A)  $0$                       (B)  $-i2\pi$                       (C)  $2\pi$                       (D)  $i2\pi$

18 曲線  $C$  為平面上一個正向簡單封閉路徑，則  $\oint_C x \cos(2y) dx - x^2 \sin(2y) dy = ?$

- (A)  $4x \sin(2y)$                       (B)  $2x \sin(2y)$   
(C)  $0$                       (D)  $\frac{1}{2}(x^2 \cos(2y) + x^2 \cos(2y))$

19 令一曲線  $C$  為  $x=t^2, y=-t, z=t^2, 0 \leq t \leq 1$ ，則  $\int_C x^2 dx - yz dy + e^z dz = ?$

- (A)  $e + \frac{1}{12}$                       (B)  $e - \frac{1}{12}$                       (C)  $e - \frac{11}{12}$                       (D)  $e + \frac{11}{12}$

20 下表所示為  $x$  及  $y$  機率質量函數 (probability mass function, PMF)，則  $X$  與  $Y$  之共變異數

$COV(X, Y) = ?$

|          |         |         |          |
|----------|---------|---------|----------|
|          | $x_1=1$ | $x_1=0$ | $x_1=-1$ |
| $y_1=1$  | 0       | 1/4     | 1/4      |
| $y_2=-1$ | 1/4     | 1/4     | 0        |

- (A)  $\frac{1}{4}$                       (B)  $-\frac{1}{2}$                       (C)  $-1$                       (D)  $1$

# 測驗式試題標準答案

考試名稱：109年特種考試地方政府公務人員考試

類科名稱：電子工程、電力工程

科目名稱：工程數學（試題代號：7343）

單選題數：20題

單選每題配分：2.50分

複選題數：

複選每題配分：

標準答案：

|    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |      |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 題號 | 第1題 | 第2題 | 第3題 | 第4題 | 第5題 | 第6題 | 第7題 | 第8題 | 第9題 | 第10題 |
| 答案 | A   | C   | D   | B   | C   | B   | C   | D   | A   | D    |

|    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 題號 | 第11題 | 第12題 | 第13題 | 第14題 | 第15題 | 第16題 | 第17題 | 第18題 | 第19題 | 第20題 |
| 答案 | D    | D    | C    | A    | C    | A    | D    | C    | C    | B    |

|    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 題號 | 第21題 | 第22題 | 第23題 | 第24題 | 第25題 | 第26題 | 第27題 | 第28題 | 第29題 | 第30題 |
| 答案 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |

|    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 題號 | 第31題 | 第32題 | 第33題 | 第34題 | 第35題 | 第36題 | 第37題 | 第38題 | 第39題 | 第40題 |
| 答案 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |

|    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 題號 | 第41題 | 第42題 | 第43題 | 第44題 | 第45題 | 第46題 | 第47題 | 第48題 | 第49題 | 第50題 |
| 答案 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |

|    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 題號 | 第51題 | 第52題 | 第53題 | 第54題 | 第55題 | 第56題 | 第57題 | 第58題 | 第59題 | 第60題 |
| 答案 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |

|    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 題號 | 第61題 | 第62題 | 第63題 | 第64題 | 第65題 | 第66題 | 第67題 | 第68題 | 第69題 | 第70題 |
| 答案 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |

|    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 題號 | 第71題 | 第72題 | 第73題 | 第74題 | 第75題 | 第76題 | 第77題 | 第78題 | 第79題 | 第80題 |
| 答案 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |

|    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 題號 | 第81題 | 第82題 | 第83題 | 第84題 | 第85題 | 第86題 | 第87題 | 第88題 | 第89題 | 第90題 |
| 答案 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |

|    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |       |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| 題號 | 第91題 | 第92題 | 第93題 | 第94題 | 第95題 | 第96題 | 第97題 | 第98題 | 第99題 | 第100題 |
| 答案 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |       |

備註：